

Capitolo 9

Calcolo integrale I

9.1 Primitive ed integrale indefinito

Definizione 9.1 *Assegnata una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, si definisce primitiva di f una qualunque funzione $F : A \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile, tale che $F'(x) = f(x)$.*

Proposizione 9.2 *Se esiste F primitiva di f , allora ne esistono infinite.*

Dimostrazione. Sia $c \in \mathbf{R}$ e si consideri la funzione $F_1(x) = F(x) + c$

... ■

Definizione 9.3 *Si definisce integrale indefinito di f l'insieme di tutte le primitive di f . Tale insieme si denota con il simbolo*

$$\int f(x)dx.$$

Proposizione 9.4 *Se la funzione f è definita su un intervallo, allora due qualsiasi primitive di f differiscono tra loro per una costante.*

Dimostrazione. Siano F_1 ed F_2 primitive di f .

... ■

In forza della proposizione precedente, se f è definita su intervallo ed ammette una primitiva F , si può scrivere

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c\}$$

o, più semplicemente

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Vogliamo ribadire che, se non siamo su un intervallo, non è affatto detto che due primitive differiscano per una costante. Quindi le precedenti scritture non sono valide, oppure si intendono riferite ad un unico intervallo.

9.2 Calcolo di primitive

L'esistenza di primitive per una funzione continua costituisce la tesi del cosiddetto Teorema fondamentale del Calcolo, che vedremo nel prossimo capitolo.

Detto teorema fornisce una “ricetta” per il calcolo di una primitiva, ma in pratica si tratta di una ricetta non utilizzabile.

In realtà la determinazione di una primitiva non è affatto un problema banale, anzi si può dimostrare che alcune funzioni elementari non ammettono una primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari.

Per calcolare le primitive il punto di partenza sono le derivate delle funzioni elementari.

In secondo luogo si sfruttano al contrario le regole di derivazione:

- linearità
- integrazione per parti
- integrazione per sostituzione